Esercizio 1

Calcolare l'area di

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\} ,$$

dove $a > 0$, $b > 0$ sono fissati.

Γ: curva (cammino) regolare in senso antiorario lungo il bordo dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2} \oint_\Gamma (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2} \oint_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma \, ,$$

dove $\overrightarrow{F} = -y \overrightarrow{i}_1 + x \overrightarrow{i}_2$

<u>Parametrizzazione di Γ</u>:

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \, , \qquad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\overrightarrow{r}(t) = a\cos(t) \overrightarrow{i}_1 + b\sin(t) \overrightarrow{i}_2$$

$$\overrightarrow{r}'(t) = -a\sin(t) \overrightarrow{i}_1 + b\cos(t) \overrightarrow{i}_2$$
$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = -b\sin(t) \overrightarrow{i}_1 + a\cos(t) \overrightarrow{i}_2$$

Per la formula di G.G.

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (x\,dy - y\,dx)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \sin^2(t) + ab \cos^2(t))\,dt$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$